Ouargla le : 10/01/2018 *((12h – 13h 30min))* Spécialité : L2 GP

Examen de la matière : Probabilités & Statistique Durée: 90 minutes

- ✓ **L'étudiant doit traiter 3 exercices.**
- ✓ **Les exercices 1 et 2 sont obligatoires.**
- ✓ **L'étudiant traitera au choix l'exercice 3 ou l'exercice 4.**

Exercice 1 *(6 points)*

Un sachet contient 2 bonbons à la menthe, 3 à l'orange et 5 au citron.
On tire, au hasard, un bonbon du sachet.

- Calculer la probabilité de chacun des quatre événements suivants :

E: «Le bonbon est à la menthe»; F: «Le bonbon est à l'orange»
G: «Le bonbon n'est pas au citron»; H: «Le bonbon est à l'orange ou au citron»

Exercice 2 *(7 points)*

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. Calculer le nombre de codes possibles.
2. Calculer le nombre de codes pairs.
3. Calculer le nombre de codes qui contiennent le chiffre 9.

Si le code comporte obligatoirement 3 chiffres différents, alors :

4. Calculer le nombre de codes possibles.
5. Calculer le nombre de codes impairs.
6. Calculer le nombre de codes qui contiennent le chiffre 6.

Exercice 3 *(7 points)*

Une urne A contient 90 boules vertes et 10 boules rouges. Une urne B contient 20 vertes et 80 boules rouges. On prend une urne au hasard et on tire, de cette urne, une boule. On constate alors que la boule tirée est noire.

1. Indiquer : l'univers et l'épreuve de cette expérience aléatoire.
2. Que veut dire le mot « hasard » ?
3. Calculer la probabilité pour que la boule tirée provienne de l'urne A.
4. Afin de généraliser l'expérience, on peut utiliser la formule de Bayes.

- Écrire cette formule.

Exercice 4 *(7 points)*

Le tableau statistique suivant donne la répartition, selon le groupe sanguin, de 40 personnes prises au hasard :

Groupes sanguins	O	A	B	AB
Effectifs	5	20	10	n_4

1. Indiquer :
   - La population statistique étudiée.
   - Les modalités.
   - Les effectifs.
   - L'effectif total.
2. Déterminer le caractère statistique étudié et son genre.
   - Que peut-on conclure ?
3. Déterminer l'effectif des personnes ayant un groupe sanguin AB.
4. Compléter le tableau statistique par les fréquences relatives et les effectifs cumulés croissants.
5. Déterminer la médiane de cette série statistique.
6. Calculer la moyenne arithmétique puis l'étendue.

Bon Courage & Bonne Chance

Dr. Réda Khama

Exercice 1 *(6 points)*

Un sachet contient 2 bonbons à la menthe, 3 à l'orange et 5 au citron.
On tire, au hasard, un bonbon du sachet.

- Calculer la probabilité de chacun des quatre événements suivants :

E: «Le bonbon est à la menthe»; F: «Le bonbon est à l'orange»
G: «Le bonbon n'est pas au citron»; H: «Le bonbon est à l'orange ou au citron»

Solution de l'exercice 1

Comme le bonbon est tiré au hasard, alors chaque bonbon a la même chance d'être tiré. *…… ((0.25 pt))*

Le nombre d'issues possibles est de 10 (combinaison sans répétition de 1 parmi 10 = 10 ou bien c'est 2 + 3 + 5 = 10) *…… ((0.25 + 0.25 = 0.50 pt))*

P(E) = (combinaison sans répétition de 1 parmi 2)/10 *…… ((0.25 + 0.25 = 0.50 pt))*
P(E) = 2/10 *…… ((0.25 pt))*
P(E) = 1/5
P(E) = 0.20 *…… ((0.25 pt))*

P(F) = (combinaison sans répétition de 1 parmi 3)/10 *…… ((0.25 + 0.25 = 0.50 pt))*
P(F) = 3/10 *…… ((0.25 pt))*
P(F) = 0.30 *…… ((0.25 pt))*

P(G) = 1 – P($\overline{G}$) *…… ((0.50 pt))*

$\overline{G}$: «Le bonbon est au citron» (Événement contraire de l'événement G) *((0.25 pt))*

or P($\overline{G}$) = (combinaison sans répétition de 1 parmi 5)/10 *… ((0.25 + 0.25 = 0.50 pt))*
P($\overline{G}$) = 5/10 *…… ((0.25 pt))*
P($\overline{G}$) = 0.50

alors : P(G)= 1 – 0.50
P(G) = 0.50 *…… ((0.25 pt))*

P(H) = P(F U $\overline{G}$) *…… ((0.50 pt))*
P(H) = P(F) + P($\overline{G}$) ……………… ((Axiome des probabilités totales car F et $\overline{G}$ sont deux événements incompatibles))
…… ((0.25 + 0.25 + 0.25 = 0.75 pt))

P(H) = 0.30 + 0.50
P(H) = 0.80 *…… ((0.25 pt))*

Exercice 2 *(7 points)*

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. Calculer le nombre de codes possibles.
2. Calculer le nombre de codes pairs.
3. Calculer le nombre de codes qui contiennent le chiffre 9.

Si le code comporte obligatoirement 3 chiffres différents, alors :

4. Calculer le nombre de codes possibles.
5. Calculer le nombre de codes impairs.
6. Calculer le nombre de codes qui contiennent le chiffre 6.

Solution de l'exercice 2

1. Il y a : $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$ codes possibles …… *((0.25 + 0.25 = 0.50 pt))*

   (Arrangements avec répétitions de 3 chiffres parmi 9). …… *((0.50 pt))*
2. Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles.

   …… *((0.25 + 0.25 = 0.50 pt))*

   Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2, 4, 6, 8).

   …… *((0.25 pt))*

   Il y a donc : $9 \times 9 \times 4 = 324$ codes. …… *((0.25 + 0.25 = 0.50 pt))*
3. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 9.

   …… *((0.25 pt))*

   Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles.

   …… *((0.25 + 0.25 = 0.50 pt))*

   Il y a donc $3 \times 8 \times 8 = 192$ codes. …… *((0.25 + 0.25 = 0.50 pt))*
4. On cherche cette fois un arrangement sans répétition de 3 chiffres parmi 9. …… *((0.50 pt))*

   Il y a donc : $9 \times 8 \times 7 = 504$ choix possibles. …… *((0.25 + 0.25 = 0.50 pt))*
5. Il y a cinq choix pour le dernier chiffre (on peut choisir 1, 3, 5, 7, 9).

   …… *((0.25 pt))*

   Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. …… *((0.25 + 0.25 = 0.50 pt))*

   Il y a donc : $8 \times 7 \times 5 = 280$ codes. …… *((0.25 + 0.25 = 0.50 pt))*
6. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6.

   …… *((0.25 pt))*

   Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles.

   …… *((0.25 + 0.25 = 0.50 pt))*

   Le nombre de tels codes est donc de $8 \times 7 \times 3 = 168$.

   …… *((0.25 + 0.25 = 0.50 pt))*

Exercice 3 *(7 points)*

Une urne A contient 90 boules vertes et 10 boules rouges. Une urne B contient 20 vertes et 80 boules rouges. On prend une urne au hasard et on tire, de cette urne, une boule. On constate alors que la boule tirée est verte.

1. Indiquer : l'univers et l'épreuve de cette expérience aléatoire.
2. Que veut dire le mot « hasard » ?
3. Calculer la probabilité pour que la boule tirée provienne de l'urne A.
4. Afin de généraliser l'expérience, on peut utiliser la formule de Bayes.
   - Écrire cette formule.

Solution de l'exercice 3

1. **<u>L'univers</u> :** Ensemble de toutes les boules ...... *((0.50 pt))*

   <u>L'épreuve</u> : « Tirer une boule de l'urne prise au hasard ». ...... *((0.50 pt))*

2. **<u>«Hasard»</u>** = Équiprobabilité des événements. ...... *((0.50 pt))*

3. Soit **e** l'événement et calculons sa probabilité p(e). ...... *((0.25 pt))*

e : «la boule tirée est verte et elle provient de l'urne A» ...... *((0.25 pt))*

$e = \alpha \cap ß$ ...... *((0.25 pt))*

avec : α : « la boule est tirée de l'urne A » ...... *((0.25 pt))*

ß : « la boule tirée de A est verte » ...... *((0.25 pt))*

D'après l'axiome des probabilités composées (événements indépendants) :

...... *((0.25 pt))*

$p(e) = p(\alpha) \times p(ß)$ ...... *((0.50 pt))*

or : $p(\alpha) = 1/2$ (choix de l'urne A) ...... *((0.50 pt))*

$p(ß) = 9/10$ (choix d'une boule verte dans A : 900/100) ...... *((0.50 pt))*

Par suite : **<u>p(e) = 9/20</u>** ...... *((0.25 pt))*

4. **<u>Formule de BAYES</u> : (pour généraliser le cas de cet exercice)**

$$p(A/n) = [\, c(A) . n(A)\,] / [\, c(A) . n(A) + c(B) . n(B)\,]$$ ... *((1.00 pt))*

<u>Avec :</u>

p (A/n) : Probabilité qu'une boule verte ait été extraite de l'urne A. ... *((0.25 pt))*

c(A) : Probabilité de choisir l'urne A. ...... *((0.25 pt))*

c(B) : Probabilité de choisir l'urne B. ...... *((0.25 pt))*

n(A) : Probabilité d'extraire une boule verte de A. ...... *((0.25 pt)*

n(B) : Probabilité d'extraire une boule verte de B. ...... *((0.25 pt))*

Exercice 4 *(7 points)*

Le tableau statistique suivant donne la répartition, selon le groupe sanguin, de 40 personnes prises au hasard :

Groupes sanguins	O	A	B	AB
Effectifs	5	20	10	n_4

1. Indiquer :
   - La population statistique étudiée.
   - Les modalités.
   - Les effectifs.
   - L'effectif total.
2. Déterminer le caractère statistique étudié et son genre. - Que peut-on conclure ?
3. Déterminer l'effectif des personnes ayant un groupe sanguin AB.
4. Compléter le tableau statistique par les fréquences relatives et les effectifs cumulés croissants.
5. Déterminer la médiane de cette série statistique.
6. Calculer la moyenne arithmétique puis l'étendue.

Solution de l'exercice 4

1.
- La population statistique étudiée : Ensemble des 40 personnes. …… *((0.25 pt))*
- Les modalités : Groupes sanguins (O ; A ; B ; AB). …… *((0.25 pt))*
- Les effectifs : (5 ; 20 ; 10 ; n_4) Nombre de personnes. …… *((0.25 pt))*
- L'effectif total : N = 40. …… *((0.25 pt))*

2. Caractère statistique étudié : Groupe sanguin. …… *((0.25 pt))*
   Son genre : Qualitatif. …… *((0.25 pt))*
   Conclusion : La variable statistique étudiée (ou caractère) n'est pas aléatoire. …… *((0.25 pt))*

3. n_4 = Effectif des personnes ayant un groupe sanguin AB …… *((0.25 pt))*
   $n_4 = N - \sum n_i$ …… *((0.25 pt))*
   $n_4 = 40 - (5 + 20 + 10)$
   $n_4 = 5$ …… *((0.25 pt))*

4. Tableau statistique complet :

Groupes sanguins (x_i)	O	A	B	AB	-
Effectifs (n_i)	5	20	10	5	**40**
Fréquences relatives (f_i)	**0.125**	**0.500**	**0.250**	**0.125**	**1.000**
Effectifs cumulés croissants (N_i)	**0**	**5**	**25**	**35**	**40**
					Totaux

…………*((0.25 × 11 = 2.75 pts))*

- Pour calculer les fréquences relatives, on utilise la formule :

$\underline{\mathbf{f_i = n_i / N}}$ ....((0.25 pt))

Exemple de calcul : $f_3 = n_3 / N$

$f_5 = 10 / 40$ ....((0.25 pt))

$\underline{\mathbf{f_5 = 0.250}}$ ....((0.25 pt))

5. Pas de Médiane (Med) car le caractère est qualitatif. ...... *((0.25 pt))*
6. Pas de Moyenne arithmétique (m) car le caractère est qualitatif. ... *((0.25 pt))*
   Pas d'Étendue (E) car le caractère est qualitatif. ...... *((0.25 pt))*

   N .B// La médiane, la moyenne arithmétique et l'étendue étant des valeurs, alors on ne peut parler de ces trois paramètres que dans le cas d'une variable aléatoire (caractère quantitatif). ...... *((0.25 pt))*