Université Kasdi Merbah Ouargla
Faculté des Sciences Appliquées
Département Génie Mécanique

جامعة قاصدي مرباح ورقلــة
كلية العلوم التطبيقية
قسم الهندسة الميكانيكية

Ouargla le : 09/01/2018 *(8 h – 9 h 30 min)* Spécialité: M1 MI

Examen de la matière : Méthodes Statistiques et Echantillonnage Durée: 90 minutes

Exercice 1 *(7 points)*

Une urne A contient 90 boules noires et 10 boules blanches. Une urne B contient 80 boules blanches et 20 noires. On prend une urne au hasard et on tire, de cette urne, une boule. On constate alors que la boule tirée est noire.

1. Calculer la probabilité pour que la boule tirée provienne de l'urne A.
2. Afin de généraliser le cas étudié dans cet exercice, on peut utiliser la formule de Bayes. - Donner cette formule.

Exercice 2 *(6 points)*

1. Compléter le tableau ci-dessous :

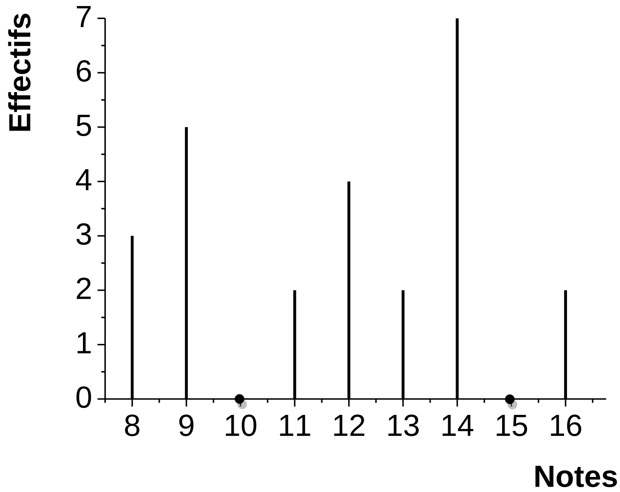
Aléa numérique	**Loi de probabilité**
Aléa fini	....
....	Loi de Poisson
Aléa continu	....

2. On considère le jeu de pile ou face d'une pièce de monnaie. On lance 9 fois de suite la pièce et on note le nombre d'apparitions de pile.
   a- Calculer la probabilité p_k de k apparitions ($k \leq 9$).
   b- Dans un système d'axes approprié, représenter graphiquement : $p_k = f(k)$.
   c- Quelle fonction représente la courbe obtenue ?
   d- De quelle loi de probabilité s'agi-t-il ?

Exercice 3 *(7 points)*

On donne le diagramme en bâtons représentant la répartition des notes obtenues à un examen par une classe d'étudiants :

1. Indiquer : La population, les modalités, les effectifs et l'effectif total.
2. S'agit-il d'une variable aléatoire ? Pourquoi ?
3. Dresser le tableau statistique complet.
4. Calculer la médiane, la moyenne et l'étendue de la classe à cet examen.



Exercice 1

Une urne A contient 90 boules noires et 10 boules blanches. Une urne B contient 80 boules blanches et 20 noires. On prend une urne au hasard et on tire, de cette urne, une boule. On constate alors que la boule tirée est noire.

1. Calculer la probabilité pour que la boule tirée provienne de l'urne A.
2. Afin de généraliser le cas étudié dans cet exercice, on peut utiliser la formule de Bayes.
   - Donner cette formule.

Solution de l'exercice 1 *(7 points)*

1. Soit **e** l'événement et calculons sa probabilité p(e). …… *((0.25 pt))*

e : «la boule tirée est verte et elle provient de l'urne A» …… *((0.50 pt))*

$e = \alpha \cap ß$ …… *((0.50 pt))*

avec : α : « la boule est tirée de l'urne A » …… *((0.50 pt))*

ß : « la boule tirée de A est verte » …… *((0.50 pt))*

D'après l'axiome des probabilités composées (événements indépendants) :

…… *((0.50 pt))*

$p(e) = p(\alpha) \times p(ß)$ …… *((0.50 pt))*

or : $p(\alpha) = 1/2$ (choix de l'urne A) …… *((0.50 pt))*

$p(ß) = 9/10$ (choix d'une boule verte dans A : 900/100) …… *((0.50 pt))*

Par suite : **<u>p(e) = 9/20</u>** …… *((0.50 pt))*

2. **<u>Formule de BAYES</u> : (pour généraliser le cas de cet exercice)**

$$p\,(A/n) = [\, c(A)\,.\,n(A)\,] \,/\, [\, c(A)\,.\,n(A) + c(B)\,.\,n(B)\,]$$ … *((1.00 pt))*

<u>Avec :</u>

p (A/n) : Probabilité qu'une boule verte ait été extraite de l'urne A. … *((0.25 pt))*

c(A) : Probabilité de choisir l'urne A. …… *((0.25 pt))*

c(B) : Probabilité de choisir l'urne B. …… *((0.25 pt))*

n(A) : Probabilité d'extraire une boule verte de A. …… *((0.25 pt)*

n(B) : Probabilité d'extraire une boule verte de B. …… *((0.25 pt))*

Exercice 2

1. Compléter le tableau ci-dessous :

Aléa numérique	Loi de probabilité
Aléa fini	……………………………………
……………………………………	Loi de Poisson
Aléa continu	……………………………………

2. On considère le jeu de pile ou face d'une pièce de monnaie. On lance 9 fois de suite la pièce et on note le nombre d'apparitions de pile.
   a- Calculer la probabilité p_k de k apparitions ($k \leq 9$).
   b- Dans un système d'axes approprié, représenter graphiquement : $p_k = f(k)$.
   c- Quelle fonction représente la courbe obtenue ?
   d- De quelle loi de probabilité s'agi-t-il ?

Solution de l'exercice 2 *(6 points)*

1.

Aléa numérique	Loi de probabilité
Aléa fini	Loi binomiale
Aléa dénombrable	Loi de Poisson
Aléa continu	Loi normale

((0.25×3 = 0.75 pt))

2.

a- Calculer la probabilité p_k de k apparitions ($k \leq 9$) :

Probabilité d'apparition de pile, ou de face = 1/2 ……… *((0.50 pt))*

La probabilité p_k de k apparitions ($k \leq n$) = ……….. *((0.50 pt))*

La probabilité p_k de k apparitions ($k \leq 9$) = … *((0.50 pt))*

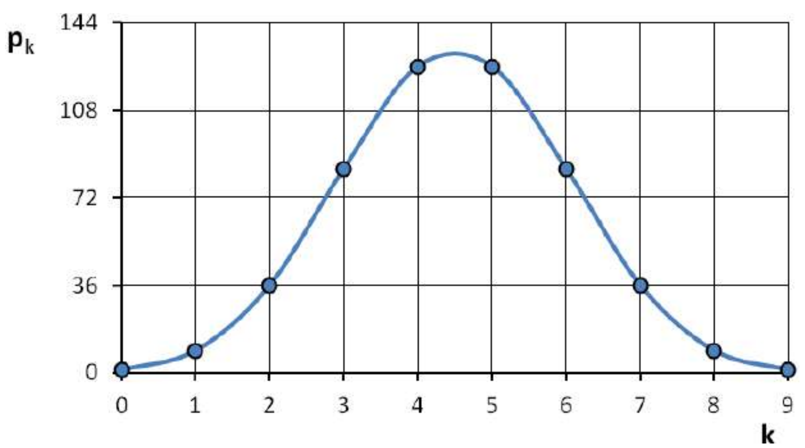
soit … *((0.50 pt))*

b- Représentation graphique de $p_k = f(k)$:

Or :

…… *((10 × 0.125 = 1.25 pt))*

En représentant graphiquement p_k en portant k en abscisse, on obtient les dix points de la figure suivante : … *((1.00 pt))*



c- **La fonction qui représente la courbe obtenue**

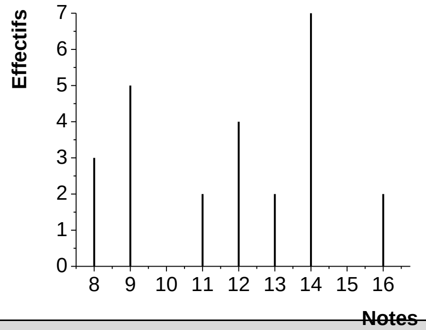
On a obtenu la fameuse « courbe en cloche » qui représente la fonction f telle que : **$f(x) = \exp(-x^2/2)$** ... *((0.50 pt))*

d- **Il s'agit de la loi de probabilité dite : Loi NORMALE ou de LAPLACE-GAUSS.** ... *((0.50 pt))*

Exercice 3

On donne le diagramme en bâtons représentant la répartition des notes obtenues à un examen par une classe d'étudiants :

1. Indiquer : La population, les modalités, les effectifs et l'effectif total.
2. S'agit-il d'une variable aléatoire ? Pourquoi ?
3. Dresser le tableau statistique complet.
4. Calculer la médiane, la moyenne et l'étendue de la classe à cet examen.



Solution de l'exercice 3 *(7 points)*

1. Population : Ensemble des notes ....((0.50 pt))

   Modalités (x_i) = Notes = {8 ; 9 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 16} ...((0.50 pt))

   Effectifs (n_i) = Nombre d'étudiants = {3 ; 5 ; 2 ; 4 ; 2 ; 7 ; 2} ......((0.50 pt))

   Effectif total (N) = Σn_i = 25 ......((0.25 × 2 = 0.50 pt))

2. Oui, il s'agit d'une variable aléatoire car le caractère étudié : (Note obtenue par chaque étudiant de la 2ème année) est quantitatif. ......((0.25 × 3 = 0.75 pt))

3. T**ableau statistique complet** :

x_i	n_i	f_i	N_i
8	3	0.12	3
9	5	0.20	8
11	2	0.08	10
12	4	0.16	14
13	2	0.08	16
14	7	0.28	23
16	2	0.08	25
Totaux	N = 25	Σf_i = 1	

.............((0.125 × 16 ≈ 2.00 pt))

- Pour calculer les fréquences relatives, on utilise la formule :

$$\underline{f_i = n_i / N}$$ ....((0.25 pt))

- Exemple de calcul :

$$f_5 = n_5 / N$$ ....((0.25 pt))

$$f_5 = 2 / 25$$

$$\underline{f_5 = 0.08}$$ ....((0.25 pt))

4.

Médiane (Med) = 13ème modalité ....((0.25 pt))

Med = 12 ....((0.25 pt))

Moyenne arithmétique (m) = $(\Sigma n_i x_i) / (\Sigma n_i)$ ....((0.25 pt))

m = 11.80 ....((0.25 pt))

Étendue (E) = $x_{max} - x_{min}$ ....((0.25 pt))

E = 16 – 8

E = 8 ....((0.25 pt))