université kasdi merbah_ ouargla_

controle de (*math*3)

durée : 1*heure*

2^{eme} (GC+TP+HYD)

S_1 (2021\2022)

Exercice 1\ (10 points) :

etudier la nature de chaque series numériques parmi les suivantes :

1\ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}\right)$, 2\ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$, 3\ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\ 2^n}\right)$, 4\ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}\right)$, 5\ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

Exercice 2\ (10 points) :

1\ etudier la convergence simple et uniforme de suite de fonctions $f_n(x) = f_n(x) = x^n$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ puis sur l'intervalle $[0,1]$·

2\ etudier la convergence si:nple et la convergence uniforme de la serie de fonctions suivante :

$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x)\right)$ / $x \in [0,1]$·

Bon Courage

Corrigé type du Contrôle

EXO01 :

1°/ $\lim_{n\to+\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})} = 1 \Rightarrow$ la serie divergente (02)

2°/ la serie $\left(\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$ est equivalente a la serie $\left(\sum \frac{1}{n^4}\right)$ (02)

Qui est une serie de Riemann Convergente donc notre serie Convergente

3°/ $\left(\sum \frac{3^n}{n \cdot 2^n}\right) \sim \quad u_n = \frac{3^n}{n\, 2^n}$ d'Alembert

$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)\, 2^{n+1}} \times \frac{n\, 2^n}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2}\, \frac{n}{n+1} = \frac{3}{2} > 1$ (02)

donc la Serie divergente

4°/ $\left(\sum \frac{1}{(\ln n)^n}\right) \sim \quad u_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$ Cauchy (02)

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$

donc la Serie Convergente

5°/ $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ est une serie absolument convergente (Riemann) (02)

donc elle est convergente

EXO 02 : 1°/ $f_n(x) = x^n$ sur $[0, \frac{1}{4}]$

* $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ donc la Suite Converge Simplement vers $f(x) = 0$ (01,5)

* $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,\frac{1}{4}]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc la Converge uniforme (01,5)

$f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$.

$f_n(1) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ x\in[0,1[}} x^n = 0$ donc la Suite Converge

Simplement Vers $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1[\end{cases}$ (01,5)

* la Convergence n'est pas uniforme puisque f n'est pas continue au points $x_0 = 1$ par contre f_n continue sur $[0,1]$

0,5

6

2°/ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x) \right)$ $x \in [0,1]$

pour $x = 1$ $S_n(0) = 0$

pour $x \neq 1$ $S_n(x) = (1-x) \sum_{k=1}^{n} x^k = \cancel{(1-x)} \cdot x \left(\frac{1-x^n}{\cancel{1-x}} \right) = x(1-x^n)$

$\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \lim_{n \to +\infty} x(1-x^n) = x$ donc la Serie Converge Simplement vers $S(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

02

* $S_n(x)$ Continue sur $[0,1]$ par contre la fonction $S(x)$ n'est pas Continue en 1 donc la Convergence n'est pas uniforme

02