وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة قاصدي مرباح ورقلة
كلية العلوم التطبيقية
جدع مشترك مهندس دولة
ميدان علوم و تكنولوجيا

Date: 10/01/2023 — **التاريخ: 2023/01/10**
Niveau: 1ière année ING — **المستوى: أولى جذع مشترك مهندس دولة**
Module: Algèbre 1 — **المقياس: جبر 1**
Durée: 1:30h — **المدة: ساعة ونصف**

Examen S1 d'Algèbre1

Exercice 01 : (04 pts)

Soit la relation $\Re$ réflexive et transitive définie sur IR par: $\forall x, y \in IR : x\Re y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

Montrer $\Re$ est une relation d'équivalence.

Exercice 02 : (08 pts)

Soient f, g deux applications définit par:

$f : Z \to IN \,/\, f(n) = n+1$ $\qquad$ $g : IN \to Z \,/\, g(n) = n^2 - 1$

1) Etudier f injective? Surjective?
2) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
3) Calculer $g^{-1}(A)$ tq: $A = \{n \in Z, |n| \leq 1\}$

Exercice 03: (04 pts)

Soit l'équation $(E) : (1+i)z^2 + iz - 1 = 0$

1) Montrer que $z_1 = \dfrac{1}{1+i}$ solution d'éq (E).
2) Déduire deuxième solution z_2 d'éq (E).

Exercice 04: (04 pts)

Soient $E = \{(x, y, z) \in IR^3 \,/\, 3x - y + 2z = 0\}$ espace vectoriel de IR^3 sur IR et les vecteurs

$v_1(1,3,0), v_2(0,2,1)$.

1) Montrer $v_1, v_2 \in E$.
2) Montrer que v_1, v_2 sont linéairement indépendants.

Bonne chance

Correction d'examen S_1 (Algèbre 01) 1ère année ING/2022-2023

Exercice 01 : (1/04)

$\mathcal{R}$ symetrique ? : $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} y \overset{?}{\Rightarrow} y \mathcal{R} x$ (0,5)

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} y \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y \Rightarrow y^2 - x^2 = y - x \Rightarrow y \mathcal{R} x$ (02)

$\Rightarrow \mathcal{R}$ symetrique.

alors $\mathcal{R}$ reflexive, symetrique et transitive implique (01,5)

$\mathcal{R}$ relation d'équivalence

Exercice 02 : (1/08)

$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \ / \ f(n) = n+1$

1) f injective ? : $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z} : f(n_1) = f(n_2) \overset{?}{\Rightarrow} n_1 = n_2$ (01,5)

$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z} : f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 + \cancel{1} = n_2 + \cancel{1} \Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow f$ injective

f surjective ? : $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{Z} : m = f(n)$ (01,5)

$\forall m \in \mathbb{N} ; m = f(n) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} : m = n+1 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} : n = m-1$

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{Z} \ / \ n = m-1$

$\Rightarrow f$ surjective

2) $f \circ g$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

, $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \ / \ g(n) = n^2 - 1$

$f \circ g(n) = f(g(n)) = f(n^2 - 1) = n^2 - \cancel{1} + \cancel{1} = n^2$ alors. (01,5)

$f \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$n \longmapsto f \circ g(n) = n^2$

$g \circ f$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "g"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

$/ \ g \circ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ (01,5)

$n \longmapsto g \circ f(n) = n^2 + 2n$

$g \circ f(n) = g(f(n)) = g(n+1) = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n + 1 - 1 = n^2 + 2n$

3) $A = \{n \in \mathbb{Z},\ |n| \leq 1\} = \{-1, 0, 1\}$, $g^{-1}(A) = ?$

02

$g^{-1}(A) = \{n \in \mathbb{N} \,/\, g(n) \in A\}$

$g(n) = -1 \Rightarrow n^2 = 0 \in \mathbb{N}$; $g(n) = 0 \Rightarrow n^2 = 1 \Rightarrow n = 1 \in \mathbb{N} \vee n = -1 \notin \mathbb{N}$

$g(n) = 1 \Rightarrow n^2 = 2 \Rightarrow n = \mp\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$, donc

$$g^{-1}(A) = \{0, 1\}$$

<u>Exercice 03</u> /04

$(E) : (1+i)z^2 + iz - 1 = 0$

1) $z_1 = \frac{1}{1+i}$: $\cancel{(1+i)}\left(\frac{1}{1+i}\right)^{\cancel{2}} + i\left(\frac{1}{1+i}\right) - 1 = \frac{1}{1+i} + \frac{i}{1+i} - 1$

02

$= \frac{\cancel{1} + \cancel{i} - \cancel{1} - \cancel{i}}{1+i} = 0$

alors z_1 solution de (E)

2) z_2 ? on a : $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ <u>ou</u> $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ alors

02

$z_1 z_2 = \frac{-1}{1+i} \Rightarrow z_2 = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{-1}{1+i} = \cancel{(1+i)}\frac{-1}{\cancel{1+i}} = -1$

$\Rightarrow \boxed{z_2 = -1}$

<u>Exercice 04</u> /04

1) $v_1(1, 3, 0)$ alors $3(1) - 3 + 2(0) = 3 - 3 = 0 \Rightarrow v_1 \in E$

02

$v_2(0, 2, 1)$ alors $3(0) - 2 + 2(1) = 2 - 2 = 0 \Rightarrow v_2 \in E$

2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha = \beta = 0$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \alpha(1, 3, 0) + \beta(0, 2, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$(\alpha, 3\alpha + 2\beta, \beta) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 3\alpha + 2\beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ alors.

02

v_1, v_2 sont linéairement indépendants