



Date: 10/01/2023

Niveau: 1^{ière} année ING

Module: Algèbre 1

Durée: 1:30h

التاريخ: 2023/01/10

المستوى: أولى جذع مشترك مهندس دولة

المقياس: جبر 1

المدة: ساعة ونصف

Examen S1 d'Algèbre1

Exercice 01 : (04 pts)

Soit la relation \mathcal{R} réflexive et transitive définie sur IR par: $\forall x, y \in IR : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

Montrer \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

Exercice 02 : (08 pts)

Soient f, g deux applications définit par:

$$f : Z \rightarrow IN / f(n) = n + 1 \quad g : IN \rightarrow Z / g(n) = n^2 - 1$$

- 1) Etudier f injective? Surjective?
- 2) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
- 3) Calculer $g^{-1}(A)$ tq: $A = \{n \in Z, |n| \leq 1\}$

Exercice 03: (04 pts)

Soit l'équation $(E) : (1 + i)z^2 + iz - 1 = 0$

- 1) Montrer que $z_1 = \frac{1}{1+i}$ solution d'éq (E).
- 2) Dédire deuxième solution z_2 d'éq (E).

Exercice 04: (04 pts)

Soient $E = \{(x, y, z) \in IR^3 / 3x - y + 2z = 0\}$ espace vectoriel de IR^3 sur IR et les vecteurs

$$v_1(1,3,0), v_2(0,2,1).$$

- 1) Montrer $v_1, v_2 \in E$.
- 2) Montrer que v_1, v_2 sont linéairement indépendants.

Bonne chance

Exercice 01 : (1/4)

\mathcal{R} symétrique? : $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} y \stackrel{?}{\Rightarrow} y \mathcal{R} x$ (0,5)

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} y \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y \Rightarrow y^2 - x^2 = y - x \Rightarrow y \mathcal{R} x$ (0,2)
 $\Rightarrow \mathcal{R}$ symétrique.

donc \mathcal{R} réflexive, symétrique et transitive implique (0,1,5)
 \mathcal{R} relation d'équivalence

Exercice 02 : (1/8)

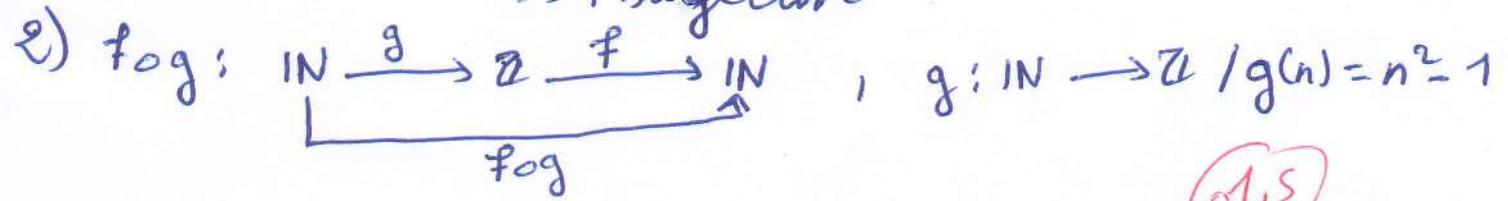
$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} / f(n) = n + 1$

1) f injective? : $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z} : f(n_1) = f(n_2) \stackrel{?}{\Rightarrow} n_1 = n_2$ (0,1,5)

$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z} : f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow f$ injective

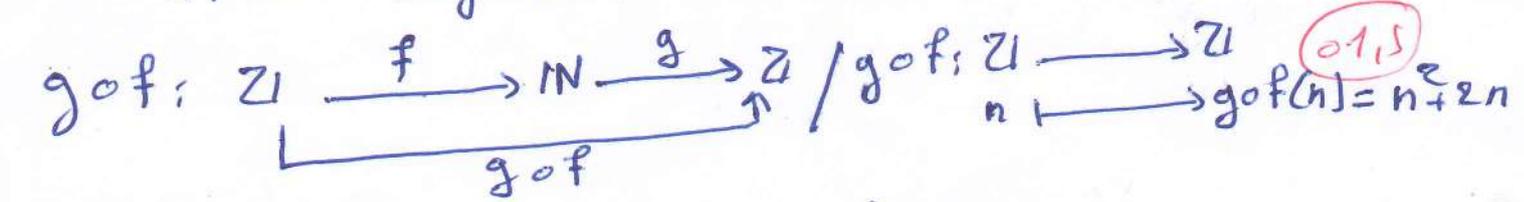
f surjective? : $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{Z} : m = f(n)$ (0,1,5)

$\forall m \in \mathbb{N} : m = f(n) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} : m = n + 1 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} : n = m - 1$
 $\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{Z} / n = m - 1$
 $\Rightarrow f$ surjective



$f \circ g(n) = f(g(n)) = f(n^2 - 1) = n^2 - 1 + 1 = n^2$ alors. (0,1,5)

$f \circ g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto f \circ g(n) = n^2$



$g \circ f(n) = g(f(n)) = g(n + 1) = (n + 1)^2 - 1 = n^2 + 2n + 1 - 1 = n^2 + 2n$

$$3) A = \{n \in \mathbb{Z}, |n| \leq 1\} = \{-1, 0, 1\}, g^{-1}(A) = ?$$

$$g^{-1}(A) = \{n \in \mathbb{N} \mid g(n) \in A\}$$

$$g(n) = -1 \Rightarrow n^2 = 0 \in \mathbb{N} \quad (g(n) = 0 \Rightarrow n^2 = 1 \Rightarrow n = 1 \in \mathbb{N} \vee n = -1 \notin \mathbb{N})$$

$$g(n) = 1 \Rightarrow n^2 = 2 \Rightarrow n = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{N}, \text{ donc}$$

$$g^{-1}(A) = \{0, 1\}$$

Exercice 03

$$(E): (1+i)z^2 + iz - 1 = 0$$

$$1) z_1 = \frac{1}{1+i} \quad (1+i) \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 + i \left(\frac{1}{1+i}\right) - 1 = \frac{1}{1+i} + \frac{i}{1+i} - 1 = \frac{1+i-1-i}{1+i} = 0$$

donc z_1 solution de (E)

$$2) z_2? \text{ on a: } z_1 z_2 = \frac{c}{a} \text{ ou } z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \text{ donc}$$

$$z_1 z_2 = \frac{-1}{1+i} \Rightarrow z_2 = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{-1}{1+i} = \frac{1}{\frac{1}{1+i}} \cdot \frac{-1}{1+i} = -1$$

Exercice 04

$$1) u_1(1, 3, 0) \text{ alors } 3(1) - 3 + 2(0) = 3 - 3 = 0 \Rightarrow u_1 \in E$$

$$u_2(0, 2, 1) \text{ alors } 3(0) - 2 + 2(1) = 2 - 2 = 0 \Rightarrow u_2 \in E$$

$$2) \forall \alpha, B \in \mathbb{R}: \alpha u_1 + B u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \stackrel{?}{\Rightarrow} \alpha = B = 0$$

$$\forall \alpha, B \in \mathbb{R} \quad \alpha(1, 3, 0) + B(0, 2, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$(\alpha, 3\alpha + 2B, B) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 3\alpha + 2B = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = B = 0 \text{ donc.}$$

u_1, u_2 sont linéairement indépendants