وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة قاصدي مرباح ورقلة
كلية العلوم التطبيقية

Niveau : 1 ière Année — المستوى :
Spécialité : Tronc commun Ingénieur — الاختصاص:
Module : Probabilités et statistiques — المقياس:
Date : 14/01/2023 — التاريخ:
Durée : 1h 30min — المدة:

Examen S1 : Probabilités et Statistiques

EXERCICE N°01 (*07* points) (*arrondi les résultats à* 10^{-3})

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient trois boules blanches et une boule noire. L'urne U_2 contient une boule blanche et deux boules noires.
On lance un dé bien équilibré. Si le dé donne un chiffre inférieur ou égal 2, on tire une boule de l'urne U_1. Sinon on tire une boule de l'urne U_2 (On suppose que le tirage est simultanément sans remise).
1/ Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.

2/ Si on a tiré une boule blanche. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_2.

EXERCICE N°02 : (*06* points) (*arrondi les résultats à* 10^{-3})

Un joueur lance un dé équilibré et gagne $10DA$ si le résultat est pair, il perd $10DA$ si le résultat est un ou trois et ne gagne rien si le résultat est cinq.
On note par X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
1/ Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2/ Calculer l'espérance et la variance de X.

EXERCICE N°03 (*07* points) (*arrondi les résultats à* 10^{-3})

Une étude concernant la série statistique suivantes :

32	35	27	28	27	29	28	36	30	32	28	33	32	27
35	33	28	36	29	32	27	32	33	28	28	36	27	34
33	35	27	29	30	32	32	35	32	28	27	29	29	28

1/ Déterminer le tableau statistique en fontion des effectifs, des effectifs cumulés (croissants et décroissants).

2/ Calculer la médiane (Me) et le mode (Mo).

3/ Calculer la moyenne arithmétique $\left(\overline{X}\right)$, la variance ($V$) et l'écart-type ($\sigma$).

BONNE CHANCE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة قاصدي مرباح ورقلة
كلية العلوم التطبيقية

Niveau : 1 ière Année — المستوى:
Spécialité : Tronc commun Ingénieur — الاختصاص:
Module : Probabilités et statistiques — المقياس:
Date : 14/01/2023 — التاريخ:
Durée : 1h 30min — المدة:

Corrigé type d'*Examen de Probabilités et Statistiques*

*CORRECTION EX*01

On pose
U_1" la boule tirée provienne de l'urne U_1"
U_1" la boule tirée provienne de l'urne U_1"
B" la boule tirée est blanche"

$$P(U_1) = P(\{1,2\}) = \frac{2}{6} \qquad et \quad P(B/U_1) = \frac{C_3^1}{C_4^1} = \frac{3}{4}$$

$$P(U_2) = P(\{3,4,5,6\}) = \frac{4}{6} \quad et \quad P(B/U_2) = \frac{C_1^1}{C_3^1} = \frac{1}{3}$$

1/ Calculer la probabilité de tirer une boule blanche

On applique la formule de la probabilité totale : $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)$

Donc,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B/U_1)P(U_1) + P(B/U_2)P(U_2) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{6} \\ &= \frac{6}{24} + \frac{4}{18} \\ &= \frac{9+8}{36} = \frac{17}{36} = 0.472 \end{aligned}$$

2/ Si on a tiré une boule blanche. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_2.
On applique la formule de Bays :

Donc,

$$\begin{aligned}
P(U_2/B) &= \frac{P(B/U_2)P(U_2)}{P(B)} \\
&= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{4}{6}}{\frac{17}{36}} \\
&= \frac{36}{17} \times \frac{4}{18} = \frac{144}{306} \\
&= 0.471
\end{aligned}$$

<u>*CORRECTION EX02*</u>

1/ Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, , 5, 6\}$

Les valeurs possibles de X sont : $\{-10, 0, 10\}$

Donc

$$\begin{aligned}
P(X = -10) &= P(\{1, 3\}) \\
&= \frac{2}{6} \\
P(X = 0) &= P(\{5\}) \\
&= \frac{1}{6} \\
P(X = 10) &= P(\{2, 4, 6\}) \\
&= \frac{3}{6}
\end{aligned}$$

x_i	-10	0	10
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$

2/ Calculer l'espérance et la variance de X

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=1}^{6} x_i P(X = x_i) \\
&= (-10) \times \frac{2}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{3}{6} \\
&= \frac{-20 + 30}{6} = \frac{10}{6} = 1.667
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V[X] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 &= \sum_{i=1}^{6} x_i^2 P(X = x_i) - (E[X])^2 \\
&= \left[(-10)^2 \times \frac{2}{6} + 0^2 \times \frac{1}{6} + 10^2 \times \frac{3}{6}\right] - (1.667)^2 \\
&= \frac{200 + 300}{6} - 2.779 = 83.333 - 2.779 \\
&= 80.554
\end{aligned}$$

CORRECTION EX03

32	35	27	28	27	29	28	36	30	32	28	33	32	27
35	33	28	36	29	32	27	32	33	28	28	36	27	34
33	35	27	29	30	32	32	35	32	28	27	29	29	28

1/ Tableau statistique :

x_i	n_i	$N^{\nearrow}$	$N^{\swarrow}$
27	7	7	42
28	8	15	35
29	5	20	27
30	2	22	22
32	8	30	20
33	4	34	12
34	1	35	8
35	4	39	7
36	3	42	3
$\sum$	42		

2/ Calculer la médiane (Me) et le mode (Mo).

a/ Médiane (Me)

$$Me = \begin{cases} X_{\frac{n+1}{2}} & \text{si n impair} \\ \frac{1}{2}\left[X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}\right] & \text{si n pair} \end{cases}$$

On a $n = 42$ (pair),

$$\begin{aligned} Me &= \frac{1}{2}\left[X_{\frac{42}{2}} + X_{\frac{42}{2}+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[X_{21} + X_{22}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[30 + 30\right] = 30 \end{aligned}$$

b/ Mode (Mo)

$Mo_1 = 28, Mo_2 = 32$

3/ Calculer la moyenne arithmétique $\left(\overline{X}\right)$, la variance ($V$) et l'écart-type ($\sigma$).

a/ Moyenne

On a

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \frac{1}{n}\sum n_i x_i \\ &= \frac{1}{42}(1288) \\ &= 30.667 \end{aligned}$$

b/ Variance

On a

$$\begin{aligned} V(X) &= \left[\frac{1}{n}\sum n_i x_i^2\right] - \overline{X}^2 \\ &= \left[\frac{1}{42}(39872)\right] - (30.667)^2 \\ &= 949.333 - 940.465 \\ &= 8.868 \end{aligned}$$

c/ Ecart-type

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \\ &= \sqrt{8.868} \\ &= 2.978 \end{aligned}$$