20

UNIVERSITE KASDI MERBAH_OUARGLA_

FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES

CONTROLE DE MATHES 03

2018/2019

2eme GC+TP+HYD DUREE : 1h30

Exercice 01 : 10 points

La réponse doit être par « Vrai » ou « Faux » avec justification de chaque réponse :

1/ $y(x) = \frac{k}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}\ln(x^2+1)\,;\, k \in R$ est la solution de l'équation différentielle

$$xy` + 2y = \frac{x^2}{x^2+1}$$

2/ Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{n}^3 + 9\mathrm{n}^2 + 20\mathrm{n} + 11)\, x^n$ alors $f(x) = \frac{x^3-3x^2-3x+11}{(1-x^4)}$

3/ $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ (-1)^n \ \frac{1.3.5 \ldots\ldots (2n-1)}{2.4.6.8.10 \ldots (2n)}$

4/ La série $(\sum \frac{5^n . \sqrt{n}}{n!})$ convergente

Exercice 02 : 10 points

A/ Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) telque :

$f_n(x) = nx^n lnx$ et $f_n(0) = 0$ sur l'intervalle $I = [0,1]$

B/ Etudier la convergence uniforme et simple de la série

$(\sum_{n=1}^{\infty} \ x^n(1-x))$; $0 \le x \le 1$

Bonne chance

Corrigé type du Contrôle de Maths 03

Exercice 01 :

Puisque $y(x) = \dfrac{K}{x^2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2x^2}\ln(x^2+1)$ et

1) $y'(x) = \dfrac{-2K}{x^3} + \dfrac{4}{x^3}\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{x(x^2+1)}$ alors :

$$xy' = \frac{-2K}{x^2} + \frac{4}{x^2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{x^2+1}$$

02 $2y = \dfrac{2K}{x^2} + 1 - \dfrac{4}{x^2}\ln(x^2+1)$ donc

$$xy' + 2y = 1 - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} \text{ alors :}$$

0,5 la bonne Réponse C'est "Vraie"

2) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n^3 + 9n^2 + 20n + 11)\, x^n$

le rayon de Convergence de cette Serie est 1.

• $P(n) = n^3 + 9n^2 + 20n + 11$

$= \alpha_0 + \alpha_1(n+1) + \alpha_2(n+1)(n+2) + \alpha_3(n+1)(n+2)(n+3)$

Pour $n=-1$ on a $P(-1) = \boxed{\alpha_0 = -1}$

Pour $n=-2$ on a $P(-2) = \alpha_0 - \alpha_1 = -1 - \alpha_1 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$

Pour $n=-3$ " $P(-3) = \alpha_0 - 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 5 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 3}$

" $n=-4$ " $P(-4) = \alpha_0 - 3\alpha_1 + 6\alpha_2 - 6\alpha_3 = 11 \Rightarrow \boxed{\alpha_3 = 1}$

donc $P(n) = -1 + 3(n+1)\times(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3)$ et alors :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(-1 + 3(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3)\big)\, x^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3)\, x^n$$

les trois Sommes se deduisent de la Serie géometrique :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\bullet\ 3\sum_{n=0}(n+1)(n+2)x^{n} = 3\Big(\sum_{n=0} x^{n+2}\Big)''$$

$$= 3\left(\frac{1}{1-x} - 1 - x\right)'' = \frac{6}{(1-x)^3}$$

02

$$\bullet\ \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^{n} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3}\Big)'''$$

$$= \left(1 + x + x^2 + \frac{1}{1-x}\right)''' = \frac{6}{(1-x)^4}$$

finallement :

$$f(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{6}{(1-x)^3} + \frac{6}{(1-x)^4} = \frac{x^3 - 3x^2 - 3x + 11}{(1-x)^4}$$

0,5 et la reponce Sera " <u>faux</u> "

3) <u>faux</u> Car :

0,5

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots(2n)} x^n$$

02 On peut facilement appliquer le resultat du cours : avec $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

4) $u_n = \dfrac{5^n \cdot \sqrt{n}}{n!} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{5^n\, 5 \cdot \sqrt{n+1}}{(n+1)n!}$ d'Alembert :

02

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{5^n}.5.\sqrt{n+1}}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{5^n}.\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{5\sqrt{n+1}}{(n+1)\cdot\sqrt{n}} = 0 < 1$$ donc la Serie Converge

0,5 et la reponse est " <u>Vraie</u> "

Exercice

(90)

A) $\begin{cases} f_n(x) = n x^n \ln x & \text{Aur } I = [0,1] \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

1°/ la Convergence Aimple :

pour $x = 1$ On a $f_n(1) = 0$ de plus $f_n(0) = 0$

pour $x \in]0,1[$ On a :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} n x^n \ln x = \lim_{n\to+\infty} x^n \ln x^n$$

02,5

$$= \lim_{\substack{y\to 0 \\ y = x^n}} y \ln y = 0$$

donc la Auite (f_n) Converge Aimplement Aur $I = [0,1]$ vers $f(x) = 0$

2°/ la Convergence uniforme :

- $|f_n(x) - f(x)| = |n x^n \ln x| = -n x^n \ln x \ / x \in [0,1]$
- $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} (-n x^n \ln x)$

$g_n(x) = -n x^n \ln x \Rightarrow g_n'(x) = -n\left(n x^{n-1} \ln x + x^{n-1}\right)$

$\Rightarrow g_n'(x) = -n x^{n-1}(n \ln x + 1)$

$g_n'(x) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ n \ln x + 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = e^{-\frac{1}{n}} \end{cases}$

$\sup_{x\in[0,1]} |f_n$ [illegible] $\sup_{x\in[0,1]}$

$$= g_n(e^{-\frac{1}{n}})$$
$$= -n(e^{-\frac{1}{n}})^n \cdot \ln(e^{-\frac{1}{n}})$$
$$= -n\, e^{-1}\left(-\frac{1}{n}\right) = e^{-1}$$

02,5

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = e^{-1} \neq 0$$

donc la Convergence n'est pas Uniforme.

B/ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$; $x \in [0,1]$

1°/ <u>la Convergence Simple</u> : si $x = 0$ ou $x = 1$ On a : $S_n(x) = 0$

si $x \in]0,1[$

$$S_n = \sum_{K=0}^{n} x^K(1-x) = (1-x)\sum_{K=0}^{n} x^K$$
$$= (1-x)\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = 1 - x^{n+1}$$

02,5

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(1 - \cancel{x^{n+1}}^{\to 0}) = 1$$

donc la Serie Converge Simplement vers $S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \ldots \\ 1 & \text{si } x \neq \ldots \end{cases}$

2°/ <u>la Convergence Uniforme</u>:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |-x^{n+1}| = 1 \neq 0$$

02,5

donc la Convergence n'est pas Uniforme