(12)

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté des Sciences Appliquées
Département d'Hydraulique et Génie Civil

Ouargla le, 17/01 /2019

Module : Elasticité
Niveau : Master I
Spécialité : Génie civil
Option : ECBR

Durée :1h et 30 min

Examen du 1^{ier} semestre
(Session normale)

Questions de cours : (06 pts)

Considérons un tenseur de contrainte dans la base (O, xyz), expliquez brièvement comment déterminer les contraintes principales (σ_I, σ_{II} et σ_{III}).

Exercice 01: (06pts)

Le tenseur de contrainte est donné par rapport à la base (O, X_1, X_2, X_3)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 4 & b & b \\ b & 7 & 2 \\ b & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{Mpa}$$

Avec b inconnu, si la contrainte principale σ_{III}=3 Mpa et $\sigma_I=2\sigma_{II}$,

1- Déterminer les contraintes principales.
2- Calculer la valeur de b.
3- Déterminer la direction principale correspondante à σ_{II}.

Exercice 02: (08pts)

En un point M de coordonnées(X_1, X_2, X_3,) on se donne le tenseur de contrainte suivant:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha x_2^2 & \gamma x_2 x_3 \\ 0 & \gamma x_2 x_3 & \beta x_3^2 \end{bmatrix} (\text{MPa})(X_2 \neq 0,\ X_3 \neq 0)$$

1- Quelles sont les conditions sur α, β, γ pour respecter les conditions d'équilibre, avec les forces de volume nulles ($\vec{F} = \vec{0}$).
2- Sur plan $X_3 = X_2$ le vecteur contrainte est donné par : $\vec{\sigma} = x_2^2\,\overrightarrow{e2} - x_3^2\,\overrightarrow{e3}$, déterminer les constantes α, β et γ.
3- Au point $M_1(1,3,3)$ déterminer graphiquement les contraintes principales.
4- Déduire la contrainte de cisaillement maximale.

Bonne chance

Module : Elasticité

Master I . ECBR

(19)

Chargé le, 17/01/201.

corrigé type

Questions de cours

soit $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$ le tenseur de contrainte dans (1)

la base $(0, xyz)$. le calcul des contraintes principale se fait par : (1) 1) le calcul des invariants

(1) 2) le trace du cercle de Mohr

(1) 3) $|[\sigma] - \sigma[I]| = 0$

(1) 4) La décomposition de $[\sigma] = [\sigma]^s + [\sigma]^a$

le tous abotir à la résolution de l'équation :

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (1) \quad — (1)$$

Les trois racines de l'équ (1) sont $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$.

Exercice N° 1

1) $I_1 = I_{1P}$ $\Rightarrow 2\sigma_{II} + \sigma_{II} + 3 = 15$ (1)

$\Rightarrow \sigma_{II} = 4$ et $\sigma_I = 8$ (1) $[\sigma]_P = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2) $I_3 = I_{3P}$ $\Rightarrow 96 - 7b^2 = 96$ (1)

$\Rightarrow b = 0$ (1)

3) Direction de σ_{II}

$$\left\{[\sigma] - [\sigma_{II}][I]\right\}\begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

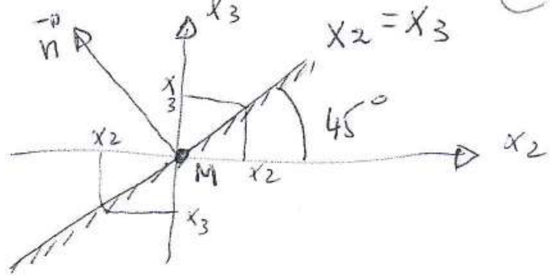
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ell_2 \\ m_2 \\ n_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3m_2+2n_2=0 \\ 2m_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0\ell_2 = 0 \Rightarrow \ell_2=1\\ n_2=0\\ m_2=0\end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \vec{n}_{II} = \begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}$$

Exercice N° 02

1) $\dfrac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ ✓

$$\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} + 0 = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} + 0 = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha x_2 + \gamma x_2 = 0 \\ \gamma x_3 + 2\beta x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{\gamma}{2} \\ \beta = -\dfrac{\gamma}{2} \end{cases}$$



2) sur le plan $X_2 = X_3$

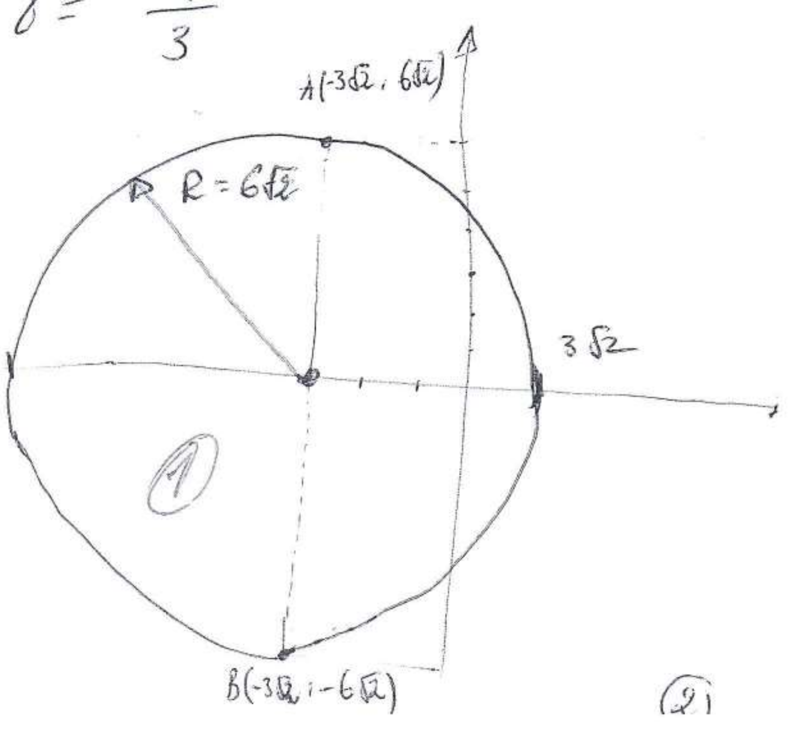
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}(M, \vec{n}) = [\sigma]\{n\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ x_2^2 \\ -x_3^2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_2 + X_3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha X_2^2 & \gamma_{X_2 X_3} \\ 0 & \gamma_{X_2 X_3} & \beta X_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ x_2^2 \\ -x_3^2 \end{Bmatrix}$$

d'où
$$\begin{cases} -\alpha + \gamma = \sqrt{2} \\ \beta - \gamma = -\sqrt{2} \\ \alpha = -\dfrac{\gamma}{2} \\ \beta = -\dfrac{\gamma}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ \beta = -\dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ \gamma = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

3)
$$[\sigma]_{M_1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \\ 0 & 6\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$



La valeur $\sigma = 6$ est déjà principale

$\sigma_I = 3\sqrt{2}$, $\sigma_{II} = 6$; $\sigma_{III} - 9\sqrt{2}$

4) $\tau_{max} = \dfrac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = 6\sqrt{2}$