(18)

Université Kasdi Merbeh-Ouargla
Faculté des Sciences Appliquées
Département de Génie Civil et D'hydraulique

Ouargla le : 14-01-2019
Spécialité : 2^{éme} Master ECBR
Durée: 1H30

EMD de MEF

Exercice 1: (7 pts)

Soit un élément triangulaire (T3) d'angle droit et de cotés h montré sur la figure 1. Soumis à une charge volumique Q.

-Déterminer et dessiner les fonctions de forme N(x,y) de cet élément.
Quelle est la propriété essentielle de ces fonctions d'interpolation ?
-Calculer les déformations et les contraintes. Pour le cas de cet élément, l'approximation du champ des contraintes sur l'élément?
Justifier votre réponse.

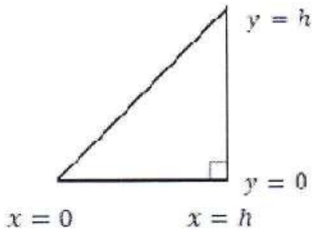


Figure 1

Exercice 2: (13 pts)

La figure 2 montre une structure composée de deux barres encastrées à leurs extrémités supérieures et assemblées à leurs extrémités inférieures avec un joint rotule auquel est suspendu un poids P = 3400 KN.
Les barres ont les mêmes caractéristiques :
Longueur : L = 1 m; section : A = 25 cm2
et module de Young E = 210 000 MPa.
L'angle à l'encastrement est : $\alpha = 36.87°$

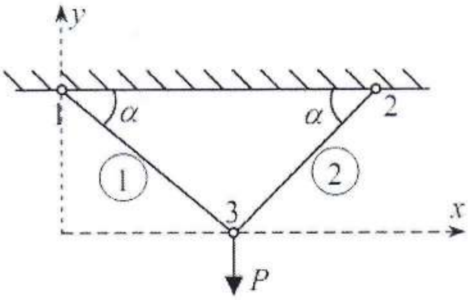


Figure 2

- Déterminer les matrices de rigidité élémentaires
- Calculer la matrice de rigidité globale
- Calculer les déplacements, les forces internes et les contraintes.
- Dessiner les diagrammes de U, F et σ.
- Préciser un nouveau maillage en tenant compte de la symétrie.

Calculer la matrice raideur réduite et retrouver la solution en déplacement.

Bonne chance

MEZIANI N.

M2 (ECBR) 18 EMD de MEF — Le, 14/01/2015

Exo1 : (7 pts)

fonctions d'interpolations pour T_3

on a : $U(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$

$V(x,y) = a_3 + a_4 x + a_5 y$

C.L $\Rightarrow a_0 = U_1$, $a_1 = \frac{1}{h}(U_2 - U_1)$

$a_2 = \frac{1}{h}(U_3 - U_2)$

On a aussi : $U(x,y) = N_1(x,y) U_1 + N_2 U_2 + N_3 U_3$

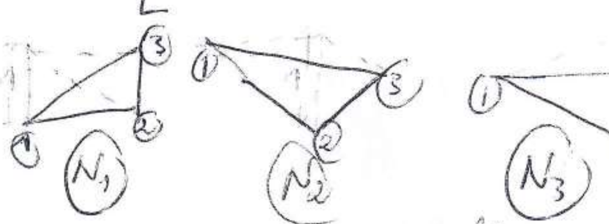
$V(x,y) = N_1 V_1 + N_2 V_2 + N_3 V_3$

N_1, N_2, N_3 sont les fonctions d'interpolation

U_1, U_2, U_3 : déplacements nodales.

Donc on obtient :

$$N(x,y) = \left[1 - \frac{x}{h} \quad \frac{x-y}{h} \quad \frac{y}{h}\right]$$



. la propriété essentielle de ces fonctions est : $N_i(x_j ; y_j) = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$ $i, j = 1, 2, 3$

Déformations et contraintes :

Déformations : $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x}$, $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y}$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}$

Donc : $\varepsilon_{xx} = \frac{U_2 - U_1}{h}$, $\varepsilon_{yy} = \frac{V_3 - V_2}{h}$, $\gamma_{xy} = \frac{U_3 - U_2}{h} + \frac{V_2 - V_1}{h}$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} & 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h} & 0 & \frac{1}{h} \\ 0 & -\frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow \{\varepsilon\} = [B]\{U\}$

Contraintes : $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{U\}$

l'approximation du $\{\sigma\}$ est d'ordre "0" par ce que le champ du $\{\sigma\}$ calculé est constant car l'approximation du déplacement est linéaire

Exo2 : (13 pts)

Élément 1 : $[K_e]_1 = 525 \times 10^3 \begin{bmatrix} 0,64 & 0,48 & -0,64 & -0,48 \\ & 0,36 & -0,48 & -0,36 \\ & & 0,64 & 0,48 \\ Sym. & & & 0,36 \end{bmatrix}$ (N/mm)

$[K_e]_2 = 525 \times 10^3 \begin{bmatrix} 0,64 & 0,48 & -0,64 & -0,48 \\ & 0,36 & -0,48 & -0,36 \\ & & 0,64 & 0,48 \\ Sym & & & 0,36 \end{bmatrix}$ (N/mm)

Matrice globale :

déplacement : $525 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 1,28 & 0 \\ 0 & 0,72 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3,4 \end{Bmatrix}$

$U_3 = 0$; $V_3 = -8,99$ mm

forces internes : (KN)

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ N_3 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2265,48 \\ 1699,11 \\ 2265,48 \\ -1699,11 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} N_2 \\ T_2 \\ N_3 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2265,48 \\ 1699,11 \\ -2265,48 \\ -1699,11 \end{Bmatrix}$$

Contraintes :

$\{\sigma_{x1}\} = \frac{2,1 \times 10^5}{1000} \times \cos 53,13 \times 8,99 = 1132,74$

$\{\sigma_{x2}\} = \frac{2,1 \times 10^5}{1000} \times \cos 53,13 \times 8,99 = 1132,746$

Diagrammes : N, T, σ

Symétrie :

Matrice de rigidité réduite : C.L : $U_1 = V_1 = U_3 = 0$

$[K_1] = 525 \times 10^3 \times 0,36$

déplacement :

$\{F\} = [K]\{d\} \Rightarrow -\frac{3,4 \times 10^6}{2} = 525 \times 10^3 \times 0,36 \times V_3$

$V_3 = -8,99$ mm