03

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté des Sciences Appliquées
Département d'Hydraulique et Génie Civil

Ouargla le, 20/01 /2019

Module : Elasticité
Niveau : Master I
Spécialité : Génie civil
Option : VOA

Durée :1h et 30 min

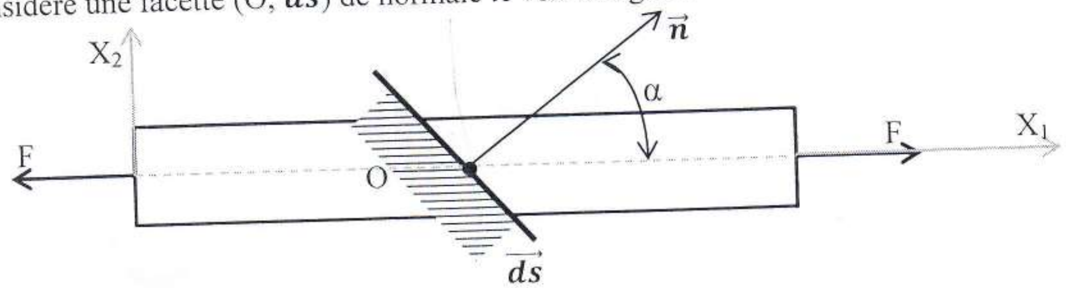
Examen du 1ier semestre
(Session normale)

Questions de cours : (05 pts)

Considérons un tenseur des contraintes [σ] dans la base (O, xyz). Expliquez brièvement comment déterminer les contraintes principales ($\boldsymbol{\sigma}_{I}$, $\boldsymbol{\sigma}_{II}$ et $\boldsymbol{\sigma}_{III}$) par le calcul de la partie sphérique et le déviateur de[σ]. .

Exercice 01: (06pts)

On exerce sur une barre métallique de section A=25mm^2, une traction axiale F=100 N. On considère une facette (O, $\overrightarrow{ds}$) de normale $\vec{n}$ voir la figure.



1) calculer le vecteur contrainte appliqué sur la facette **(O, $\overrightarrow{ds}$)**.
2) Calculer la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_n$ et la contrainte tangentielle $\boldsymbol{\tau}$ s'exerçant sur cette facette.
3) Pour quelle condition de α, $\boldsymbol{\sigma}_n$ et $\boldsymbol{\tau}$ sont-elle max.

Exercice 02: (09pts)

Au point M d'un matériau, et dans le repère $\{\vec{e_i}\}$ le tenseur de contrainte s'écrit:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 4 & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4\alpha \end{bmatrix} \text{ Mpa, } \alpha \text{ : constante réelle, paramètre de charge.}$$

1) Quel est l'état de contrainte pour $\alpha = 0$.
2) Calculer les contraintes principales en fonction de α.
3) Déduire les scalaires invariants du deux tenseurs.

Dans la suite en prend $\alpha = 1$.

4) Déterminer les axes principaux.
5) Déterminer la partie sphérique et le déviateur de[σ]. Quelle est leur utilité.
6) Calculer le vecteur contrainte sur la facette de normale $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ tel que:

$$\begin{cases} \vec{n}_1 = \dfrac{1}{2}\vec{e}_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2 \\ \vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{e}_1 \end{cases}$$

Bonne chance

Ouargla le, 20/01/2019

Module Elasticité

Master I VOA

Corrigé type

03

<u>Questions de cours</u>

soit $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$ le tenseur de contrainte dans (1)

la base $(0, xyz)$, le calcul des valeurs principales par la decomposition de $[\sigma]$ en deux partie se fait comme suit :-

$[\sigma] = [\sigma]^s + [\sigma]^d$ (1)

avec $[\sigma]^s = \frac{I_1}{3}\delta_{ij}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i=j \\ 0 & si\ i\neq j \end{cases}$

$= \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$ et $\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$

$[\sigma]^d = [\sigma] - [\sigma]^s$ (1)

d'ou le calcul des valeurs principales de $[\sigma]^d$ par la résolution de l'équation

$\sigma_d^3 - J_1\sigma_d^2 + J_2\sigma_d - J_3 = 0$ (1) —— (1)

avec $J_1 = tr\,[\sigma]^d = 0$

$J_2 = -\frac{1}{2}\,tr\,[\sigma]_d^2$ (1)

$J_3 = det[\sigma]^d$

en fin $\sigma_I = \sigma_I^d + \sigma_m$

$\sigma_{II} = \sigma_{II}^d + \sigma_m$ (1)

$\sigma_{III} = \sigma_{III}^d + \sigma_m$

ou $\sigma_I^d > \sigma_{II}^d > \sigma_{III}^d$ sont les racine de l'équ (1)

<u>Exercice N° 01</u>

1) $\vec{\sigma}(0, d\vec{S}) = [\sigma]\cdot\{n\}$ et $[\sigma] = \begin{bmatrix} \frac{100}{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$ (1)

$\vec{n} = \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$ (1)

2) $\vec{\sigma}(0, d\vec{S}) = 4\cos\alpha\,\vec{e_1}$ (1)

$\sigma_n = \{n\}^t[\sigma]\{n\} = 4\cos^2\alpha$ (1)

(1)

$\sigma_t = \{t\}^T [\sigma] \{n\}$

$= -4\cos\alpha \sin\alpha$ (1)

03

3) σ_n est max lorsque $\cos\alpha$ est max d'où $\alpha = 0°$ (1)

σ_t est max " ($\cos\alpha$ et $\sin\alpha$) sont max don $\alpha = 45°$ (1)

Exercice n° 02

1) Pour $\alpha = 0$ $[\sigma] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ état de contrainte en traction biaxiale suivant x. (0,5)

2) La valeur 4α est déjà principale (0,5)

$$\det([\sigma] - \sigma[I]) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 4 & 2\alpha \\ 2\alpha & 4 \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\sigma^2 - 8\sigma + 16 - 4\alpha^2 = 0$$ (0,5)

d'où $\sigma_I = 4 + 2\alpha$, $\sigma_{II} = 4\alpha$, $\sigma_{III} = 4 - 2\alpha$ (0,5)

$$[\sigma]_P = \begin{bmatrix} 4+2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 4\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4-2\alpha \end{bmatrix}$$ (0,5)

3) $I_1 = I_{1P} = 8 + 4\alpha$ (0,5)

$I_2 = I_{2P} = -4\alpha^2 + 32\alpha + 16$ (0,5)

$I_3 = I_{3P} = -16\alpha^3 + 64\alpha$ (0,5)

4) Pour $\alpha = 1$ $[\sigma]_P = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (0,5)

Direction de $\sigma_I \rightarrow \vec{n}_I = \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}$

$$\{[\sigma] - \sigma_I [I]\} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (*)$$ (0,5)

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

$$(*) \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$ (0,5)

$$\Rightarrow \begin{cases} -2l_1 + 2m_1 = 0 \\ 2l_1 - 2m_1 = 0 \\ -2n_1 = 0 \Rightarrow n_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow l_1 = m_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0{,}3$$

$$\Rightarrow \vec{N}_I \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 0{,}5$$

de même $\longrightarrow$ $\vec{N}_{II} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ 0,5 , $\vec{N}_{III} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$

5) $[\sigma]^s = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$ avec $\sigma_m = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ 0,5

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad 0{,}5$$

$$[\sigma]^d = [\sigma] - [\sigma]^s = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0{,}5$$

6) $\vec{\sigma}(M, \vec{n}_1) = [\sigma]\{\vec{n}_1\} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$ 0,5

$$= (2 + \sqrt{3})\vec{e}_1 + (1 + 2\sqrt{3})\vec{e}_2$$

$\vec{\sigma}(M, \vec{n}_2) = [\sigma]\{\vec{n}_2\}$

$\vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{e}_1 = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ 0,5

$\|n_2\| = \frac{1}{2} \neq 1$

$\vec{n}_2' = \dfrac{\frac{1}{2} e_1}{\frac{1}{2}} = 1\vec{e}_1$

$$\vec{\sigma}(M, \vec{n}_2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \quad 0{,}5$$