UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté des Sciences Appliquées
Département d'Hydraulique et Génie Civil

Ouargla le, 16/02 /2019

Module : Elasticité
Niveau : Master I
Spécialité : Génie civil
Option : VOA

Durée :1h et 30 min

Examen du 1^{ier} semestre
(Session de rattrapage)

<u>Questions de cours :</u> (04 pts)

Considérons un tenseur de contrainte dans la base (O, xyz), expliquez brièvement comment déterminer les contraintes principales ($\boldsymbol{\sigma}_I$, $\boldsymbol{\sigma}_{II}$ et $\boldsymbol{\sigma}_{III}$).

<u>Exercice N° 01 :</u> (06 pts)

Si le repère (O, x, y, z) est un repère principal pour le tenseur des contraintes $[\sigma]$, Déterminer la contrainte normale σ_n et le module de la contrainte de cisaillement τ pour la direction $\vec{N}$ en fonction des invariants principaux, avec :

$$\vec{N} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}, \text{ et } n_1 = n_2 = n_3$$

<u>Exercice N° 02 :</u> (10 pts)

On donne les composantes du tenseur des contrainte au un point **P**, avec : $\boldsymbol{\sigma}_x = -50$, $\boldsymbol{\sigma}_y = -50$,

$\boldsymbol{\sigma}_z = 0$, $\boldsymbol{\tau}_{xy} = 100$, $\boldsymbol{\tau}_{xz} = 0$, $\boldsymbol{\tau}_{yz} = 0$.

Les contraintes sont en MPa.

1°) Ecrire le tenseur des contraintes en point P dans le repère (oxyz).

2°) Représenter ces résultats sur un petit cube dans le repère (oxyz).

3°) Que peut-on conclure sur $\boldsymbol{\sigma}_z$?

4°) Déterminer les contraintes principales et leurs directions analytiquement et graphiquement.

5°) Pouvez-vous contrôler votre résultats analytiques, si oui, comment ?

6°) Calculer les composantes du vecteur contrainte, ainsi que les contraintes normale et tangentielle s'exerçant sur un plan de coupe dont la normale (N) fait un angle de 30° par rapport à l'axe **X** positif.

7°) Vérifier les résultats de la question N° 06.

Bonne chance

Elasticité
MI VOA

07

Ouargla, le 16/02/2019

Corrigé type

* Questions de cours

Soit le tenseur des contrainte $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$ (1)

la determination de (σ_I, σ_{II} et σ_{III}) se fait par la resolution de l'equation $\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$ —— (I) (1)

avec σ_I, σ_{II} et σ_{III} sont les racine de l'equation (I) (1)

et $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ (1)

* Exercice N° 01

soit $[\sigma]_p = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$ (1)

$n_1 = n_2 = n_3$ et $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

$\Rightarrow n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ (1)

$$\sigma_n = \{\vec{N}\}^t [\sigma] \{\vec{N}\} = \frac{1}{\sqrt{3}} \{1, 1, 1\} \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})$$

$$= \frac{I_1}{3} \quad (1)$$

$$\|\vec{\sigma}(M,\vec{N})\|^2 = \sigma_n^2 + \|\vec{\tau}\|^2 \Rightarrow \|\tau\|^2 = \|\vec{\sigma}(M,\vec{N})\|^2 - \sigma_n^2 \quad (1)$$

$$\|\vec{\tau}\|^2 = \frac{1}{3}(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - \frac{1}{9}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(tr[\sigma])^2 - tr[\sigma]^2\right] = \frac{1}{2}\left[(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2 - (\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2)\right]$$

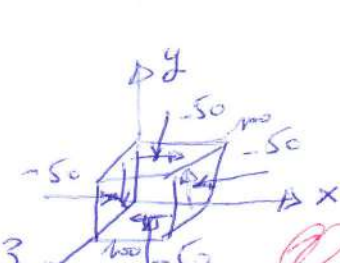
$$= \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_I\sigma_{III} + \sigma_{II}\sigma_{III} \quad (1)$$

$$\|\vec{\tau}\|^2 = \frac{1}{3}\left[\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2\right]$$

$$= \sqrt{2I_1^2 - \frac{2}{3}I_2} \quad (1)$$

* Exercice N° 02

1) $[\sigma] = \begin{bmatrix} -50 & 100 & 0 \\ 100 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ MPa (1)



(1)

2)

3) $\sigma_3 = 0$ est une valeur principale.

4) $|[\sigma] - \sigma[I]| = 0$

$$\left|\begin{bmatrix} -50 & 100 \\ 100 & -50 \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} -50-\sigma & 100 \\ 100 & -50-\sigma \end{bmatrix}\right| = 0$$

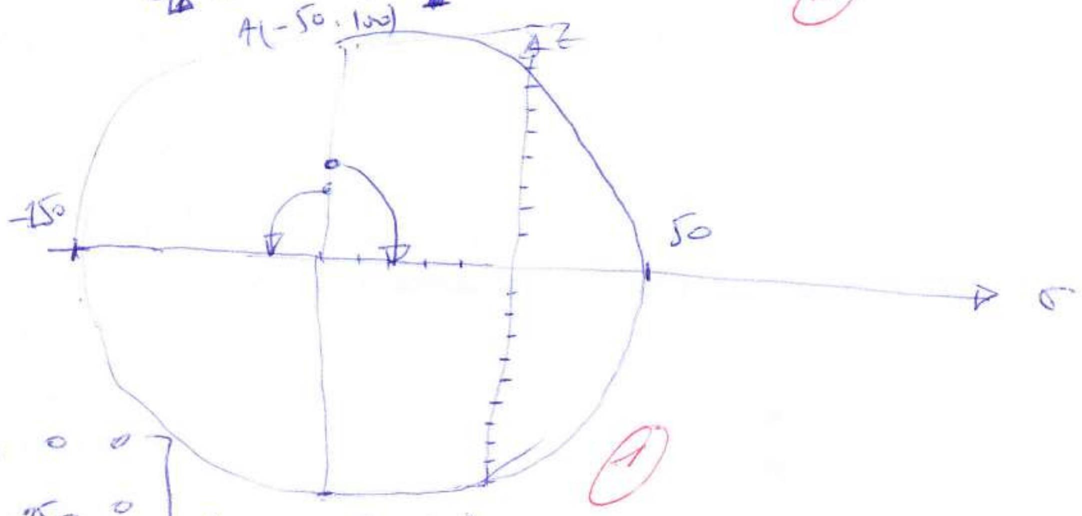
$$(-50-\sigma)^2 - 100^2 = 0$$

$$\cancel{\sigma^2 + 1500\sigma} \quad \sigma^2 + 100\sigma - 7500 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 200$$

$$\sigma_{II} = -150 \;,\; \sigma_{I} = +50 \quad \sigma_{III} = 0$$

1



1

$$[\sigma]_p = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

$$2\alpha_I = 2\alpha_{II} = 90 \Rightarrow \alpha_I = \alpha_{II} = 45°$$

1

$$\vec{n}_{III} = \vec{z} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{n}_I \longrightarrow \{[\sigma] - \sigma_I[I]\}\begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \longrightarrow \vec{n}_I = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix}$$

1

$$n_{II} \longrightarrow \{[\sigma] - \sigma_{II}[I]\}\begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \vec{n}_{II} \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{Bmatrix}$$

5) Oui, Il faut que
$I_1 = I_{1P} = -100$ ok
$I_2 = I_{2P} = -7500$ ok
$I_3 = I_{3P} = -7500$ ok

1

6) $\vec{\sigma}(M,\vec{N}) = [\sigma]\{N\}$

$$= \begin{bmatrix} -50 & 100 \\ 100 & -50 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \cos 30 \\ \sin 30 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -43,30 + 50 \\ 86,6 - 25 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6,7 \\ 61,6 \end{Bmatrix} MPa$$

1

$$\sigma_n = \vec{\sigma}(M,\vec{N})\{\vec{N}\} = (6,7 \quad 61,6)\begin{pmatrix} \cos 30 \\ \sin 30 \end{pmatrix} = (5,80 + 30,8) = 36,6\, MPa$$

1

2

$\vec{\tau} = \vec{\sigma}(M, \vec{n}') - \sigma_n \vec{n}' = \begin{pmatrix} 6,7 \\ 61,6 \end{pmatrix} - 36,6 \begin{Bmatrix} \cos 30 \\ \sin 30 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -25 \\ 43,3 \end{Bmatrix}$ MPa (1) 0,7

7) $\|\vec{\sigma}(M, \vec{n}')\|^2 = \sigma_n^2 + \|\vec{\tau}\|^2 = 3839,59$ ok (1)