1) Exercice N° 1 = (6,5 points) | Corrigé type

MDF 2
3ème Année
Énergétique.

$$\begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases}$$

a) l'écoulement est irrotationnel c'est à dire que :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{V} = \vec{0}$$

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}(0-0) = 0$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(0-0) = 0$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(c-b) = 0 \Rightarrow c - b = 0 \quad \text{—(1)}$$

0,5

) La conservation de la masse est définie par l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

donc : $\frac{\partial u}{\partial x} = a$ et $\frac{\partial v}{\partial y} = d$ alors $a + d = 0$ —— (2)

0,5

la relation entre les quatre paramètres (a, b, c et d) :

$$c - b = a + d \Leftrightarrow \boxed{a + d + b - c = 0} \quad \text{—(3)}$$

0,5

2) Trouver les fonctions des lignes de courant ψ et des lignes équipotentielles ϕ ($\psi = \phi = 0$ à $x = y$)

a) Les lignes de courant.

on a : $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ alors :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = ax + by \Rightarrow \partial \psi_{/x} = (ax + by)\partial y$$

$$\psi_{/x} = axy + \frac{1}{2} by^2 + C_1$$

et

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -(cx + dy) \Rightarrow \partial \psi_{/y} = -(cx + dy)\partial x$$

$$\psi_{/y} = -\frac{1}{2} cx^2 - dxy + C_2$$

on trouve que : $\psi = axy + \frac{1}{2} by^2 - \frac{1}{2} cx^2 - dxy + C$

pour $x = y = 0$ on a : $\psi = 0$ donc $C = 0$

$$\psi = axy + \frac{1}{2} by^2 - \frac{1}{2} cx^2 - dxy$$

$$\boxed{\psi = (a - d)xy + \frac{1}{2} by^2 - \frac{1}{2} cx^2} \quad (1)$$

b) les lignes équipotentielles ϕ :

on a :

$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ et $v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$

$$\partial \phi = u \partial x = (ax + by)\partial x \Rightarrow \phi = \frac{1}{2} ax^2 + byx + f(y)$$

donc : $\frac{\partial \phi}{\partial y} = bx + \frac{\partial f(y)}{\partial y} = v \Leftrightarrow bx + \frac{\partial f(y)}{\partial y} = cx + dy$

Selon l'equation (1) on a : $b = c$ donc on trouve que :

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = d.y \Rightarrow f(y) = \int d \cdot y \cdot \partial y$$

$f(y) = d \cdot \frac{1}{2} y^2 + C'$ alors : $\phi = \frac{1}{2} ax^2 + byx + \frac{1}{2} dy^2 + C'$

pour $x = y = 0$ on a : $\phi = 0$ donc $C' = 0$

on obtient :
$$\boxed{\phi = \frac{1}{2} a x^2 + b y x + \frac{1}{2} d y^2}$$ 1

3) Si $a = 4$, Trouver b, c et d sachant que, La droite $y = \frac{1}{3} x$ est une fonction de Courant nulle

La fonction des lignes de Courant est définie par :

$$\phi = \frac{1}{2} a (x)^2 + b \left(\frac{1}{3} x\right) x + \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{3} x\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} a \cancel{x^2} + \frac{1}{3} b \cancel{x^2} + \frac{1}{18} d \cancel{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} a + \frac{1}{3} b + \frac{1}{18} d = 0$$

alors :

$$\begin{cases} C - b = 0 \\ a + d = 0 \\ \frac{1}{2} a + \frac{1}{3} b + \frac{1}{18} d = 0 \end{cases}$$

pour $\boxed{a = 4}$ on obtient :

$$\begin{cases} C = b \\ \boxed{d = -4} \text{ 1} \\ 2 + \frac{1}{3} b + \left(\frac{-4}{18}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{16}{3}} \text{ 1} \quad \text{et} \quad \boxed{C = b = -\frac{16}{3}} \text{ 1}$$

4) Tracer l'allure générale du réseau d'écoulement :

$$\phi = 2x^2 + \left(-\frac{16}{3}\right) y x - 2y^2$$

$$\boxed{\phi = 2x^2 - \frac{16}{3} y x - 2y^2}$$

Exercice N° 2 (6,5 points)

$$\frac{u}{U_\infty} = \left[\frac{y}{\delta}\right]^{0,22}$$

1) Exprimer $\frac{\delta^*}{\delta}$, $\frac{\theta}{\delta}$ et H

a) $\frac{\delta^*}{\delta}$

on a : $\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{0,22}\right) dy$

$$= \left[y - \frac{1}{1,22}\frac{y^{1,22}}{\delta^{0,22}}\right]_0^\delta = \left[\delta - \frac{\delta}{1,22}\right]$$

$$\Rightarrow \delta^* = \frac{0,22}{1,22}\delta \Rightarrow \boxed{\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{0,22}{1,22} = 0,1803}$$ 2

b) $\frac{\theta}{\delta}$

alors : $\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{0,22}\left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{0,22}\right) dy$

$$\theta = \int_0^\delta \left(\left(\frac{y}{\delta}\right)^{0,22} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{0,44}\right) dy$$

$$= \left[\frac{1}{1,22}\frac{y^{1,22}}{\delta^{0,22}} - \frac{1}{1,44}\frac{y^{1,44}}{\delta^{0,44}}\right]_0^\delta$$

$$= \left(\frac{\delta}{1,22} - \frac{\delta}{1,44}\right) = \frac{0,22}{1,7568}\delta$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\theta}{\delta} = \frac{0,22}{1,7568} = 0,1252}$$ 2

4

c - Facteur forme H:

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \Rightarrow H = \frac{\delta^*/\delta}{\theta/\delta} = \frac{0,1803}{0,1252} = 1,44$$

donc : $\boxed{H = 1,44}$ 1,5

2) pour $U = 20\ m/s$ et $\delta = 5cm$.

$$\delta^* = \frac{0,22}{1,22} \times 5 \Rightarrow \boxed{\delta^* = 0,9016\ cm}$$ 0,5

$$\theta = \frac{0,22}{1,7568} \times 5 \Rightarrow \boxed{\theta = 0,6261\ cm}$$ 0,5

Exercice N° 3 (7points)

1) La forme générale de Trainée "T"

a) La liste des variables :

$[T] = [N] = [kg \cdot m/s^{+2}]$

$[S] = [m^2]$

$[m] = [kg]$

$[g] = [m/s^2]$

$[V] = [m/s]$

$[\rho] = [kg/m^3]$

b) nombre des Variables : $k = 6$

nombre des unités : $r = 3$

donc nombre des équation $k - r = 6 - 3 = 3$. 1

alors il faut déterminer π_1, π_2 et π_3.

c)

1

	T	S	m	g	V	ρ
M	1	0	1	0	0	1
L	1	2	0	1	1	-3
T	-2	0	0	-2	-1	0

les grandeurs fondamentales

d) * $\pi_1 = T\, S^{a_1}\, g^{b_1}\, \rho^{c_1}$

$$M^0 L^0 T^0 = MLT^{-2} (L^2)^{a_1} (LT^{-2})^{b_1} (ML^{-3})^{c_1}$$

$$\begin{cases} 1 + c_1 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = -1} \\ 1 + 2a_1 + b_1 - 3c_1 = 0 \Rightarrow 1 + 2a_1 - 1 + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = -\frac{3}{2}} \\ -2 - 2b_1 = 0 \Rightarrow \boxed{b_1 = -1} \end{cases}$$

donc : $\pi_1 = T\, S^{-\frac{3}{2}}\, g^{-1}\, \rho^{-1} \Rightarrow \boxed{\pi_1 = \frac{T}{S^{\frac{3}{2}}\, g\, \rho}}$ 1

* $\pi_2 = m\, S^{a_2}\, g^{b_2}\, \rho^{c_2}$

$$M^0L^0T^0 = M(L^2)^{a_2}(LT^{-2})^{b_2}(ML^{-3})^{c_2}$$

$$\begin{cases} 1 + c_2 = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = -1} \\ 2a_2 + b_2 - 3c_2 = 0 \Rightarrow 2a_2 + 0 - 3(-1) = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}} \\ -2b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = 0 \end{cases}$$

donc: $\pi_2 = m\, S^{-\frac{3}{2}} g^0 \rho^{-1} \Rightarrow \boxed{\pi_2 = \dfrac{m}{S^{\frac{3}{2}}\rho}}$ 1

* $\pi_3 = V\, S^{a_3} g^{b_3} \rho^{c_3}$

$$M^0L^0T^0 = (LT^{-1})(L^2)^{a_3}(LT^{-2})^{b_3}(ML^{-3})^{c_3}$$

$$\begin{cases} c_3 = 0 \\ 1 + 2a_3 + b_3 - 3c_3 = 0 \Rightarrow 1 + 2a_3 - \frac{1}{2} - 0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{4}} \\ -1 - 2b_3 = 0 \Rightarrow b_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

alors: $\pi_3 = V\, S^{-\frac{1}{4}} g^{-\frac{1}{2}} \rho^0 \Rightarrow \boxed{\pi_3 = \dfrac{V}{S^{1/4} g^{1/2}}}$ 1

Nous obtenons l'equation suivante:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{T}{S^{\frac{3}{2}} \cdot g\rho} = f\left(\frac{m}{S^{\frac{3}{2}}\rho}, \frac{V}{S^{\frac{1}{4}} g^{1/2}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{T = S^{\frac{3}{2}} g \rho f\left(\frac{m}{S^{\frac{3}{2}}\rho}, \frac{V}{S^{\frac{1}{4}} g^{\frac{1}{2}}}\right)}$$ 1

2) on a :

$$\left(\frac{V}{S^{\frac{1}{4}} \cdot g^{1/2}}\right)_m = \left(\frac{V}{S^{1/4} \cdot g^{1/2}}\right)_p$$

$$g_m = g_p$$

$$\Rightarrow \quad V_p = V_m \left(\frac{S_p}{S_m}\right)^{1/4}$$

on a l'échelle des longeur l_r et l'echelle de surface $l_s = l_r^2$

alors :

$$V_p = 10 \left(100\right)^{0,25}$$

$$\boxed{V_p = 31,6 km/h}$$

1