UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE
14/01/2018
Durée : 01h 30min
Master II Energétique

Examen

Optimisation

EXERCICE 1 (06 points)

Minimiser: $Z = -3X_1 - 4X_2$

sous les contraintes

$X_1 + 2X_2 \le 50$

$X_1 \le 20$

$X_2 \le 30$

$X_1, X_2 \ge 0$

On transforme le problème sous sa forme canonique (standard)

Maximiser: $Z = 3X_1 + 4X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5$

sous les contraintes

$1X_1 + 2X_2 + 1X_3 = 50$

$1X_1 + 1X_4 = 20$ 1

$0X_1 + 1X_2 + 1X_5 = 30$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \ge 0$

Tableau 1

Tableau 1			3	4	0	0	0
Base	C_b	P_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
P_3	0	50	1	2	1	0	0
P_4	0	20	1	0	0	1	0
P_5	0	30	0	1	0	0	1
Z		0	-3	-4	0	0	0

1

La variable qui sort de la base est X_3, et celle qui entre est X_2.

Tableau 2

Tableau 2			3	4	0	0	0
Base	C_b	P_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
P_2	4	25	1 / 2	1	1 / 2	0	0
P_4	0	20	1	0	0	1	0
P_5	0	5	-1 / 2	0	-1 / 2	0	1
Z		100	-1	0	2	0	0

1

La variable qui sort de la base est X_4, et celle qui entre est X_1.

Tableau 3

Tableau 3			3	4	0	0	0
Base	C_b	P_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
P_2	4	15	0	1	1 / 2	-1 / 2	0
P_1	3	20	1	0	0	1	0
P_5	0	15	0	0	-1 / 2	1 / 2	1
Z		120	0	0	2	1	0

1

La solution optimale est Z = -Z = -120 0.5

$X_1 = 20$ 0.25

$X_2 = 15$ 0.25

EXERCICE 2 (04 points)

$f : R \to R : f(x) = 1 - x^2$ est concave:

$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = 1 - \lambda x_1^2 - (1-\lambda) x_2^2$ 0.5

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = 1 - \lambda^2 x_1^2 - (1-\lambda)^2 x_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2$ 0.5

En soustrayant ces deux équations et en factorisant:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$
$$= 1 - \lambda^2 x_1^2 - (1-\lambda)^2 x_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 - 1 + \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2$$
$$= -\lambda^2 x_1^2 + \lambda x_1^2 - (1-\lambda)^2 x_2^2 + (1-\lambda)x_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2$$
$$= \lambda(1-\lambda)x_1^2 - (1 - 2\lambda + \lambda^2)x_2^2 + (1-\lambda)x_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2$$
$$= \lambda(1-\lambda)x_1^2 + (-1 + 2\lambda - \lambda^2 + 1 - \lambda)x_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2$$
$$= \lambda(1-\lambda)x_1^2 + (\lambda - \lambda^2)x_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2$$
$$= \lambda(1-\lambda)x_1^2 + \lambda(1-\lambda)x_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2$$
$$= \lambda(1-\lambda)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)$$
$$= \lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 \geq 0$$ 1

Ce dont on déduit que f est **concave**. 0.5

$f : R \to R : f(x) = x^2 - 1$ est convexe

$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 - 1$ 0.5

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 - 1$ 0.5

En soustrayant ces deux équations et en factorisant:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$
$$= \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 - 1 - \lambda x_1^2 - (1-\lambda)x_2^2 + 1$$
$$= \lambda^2 x_1^2 - \lambda x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 - (1-\lambda)x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2$$
$$= -\lambda(1-\lambda)x_1^2 + (1 - 2\lambda + \lambda^2)x_2^2 - (1-\lambda)x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2$$
$$= -\lambda(1-\lambda)x_1^2 + (1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 + \lambda)x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2$$

$$= -\lambda(1-\lambda)x_1^2 + (-\lambda+\lambda^2)x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2$$
$$= -\lambda(1-\lambda)x_1^2 + -\lambda(1-\lambda)x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2$$
$$= -\lambda(1-\lambda)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)$$
$$= -\lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 \le 0$$ 1

Ce dont on déduit que f est **convexe** 0.5

EXERCICE 3

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x \\ 3y^2 - 3 \end{pmatrix}$$ 1

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$ 1

$(2,2)$ n'est pas un minimum car $\nabla f(2,2) = \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \end{pmatrix}$ 1

$(-1,1)$ est un minimum car $\nabla f(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\nabla f(-1,1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ est définie positive. 1

$(0,-1)$ est un maximum car $\nabla f(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\nabla f(0,-1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ est définie négative. 1

EXERCICE 4

1. Le programme MATLAB permettant la création de 2 vecteurs x et y allant de −4 à +4, puis un maillage [X, Y] correspondant.

```
x = -4:0.5:4;   0.5
y = -4:0.5:4;   0.5
[X,Y] = meshgrid(x, y);   0.5
```

2. Le programme MATLAB permettant de tracer la surface définie par la fonction $f = \sqrt{x^2 + y^2}$

```
Z = sqrt(X .^2 + Y.^2);   0.5
surf(X,Y,Z)   0.5
```

3. Le programme MATLAB permettant de tracer 10 courbes de niveau de la fonction *f*

```
contour(X,Y,Z, 10)   0.5
```

4. Le programme MATLAB permettant de Trouver la solution du problème d'optimisation suivant :

```
function f = foncobj(x)   0.5
f = sqrt(x(1)^2 + x(2)^2);   0.5
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x0 = [-1,-1];     % points de départ   0.5
options = optimset('LargeScale','off');
[x,fval,exitflag,output] = fminunc(@foncobj,x0,options)   0.5
```